06/2017

Lehrplan

DFG / LFA

Mathematik

Zweig: SMP

Klassenstufen 11 und 12

Lehrplan validiert durch das Ministère de l’Éducation nationale, das Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg und das Ministerium für Bildung und Kultur Saarland

1 Leitgedanken

1.1 Bildungswert des Faches

Ein allgemeinbildender Mathematikunterricht soll unter anderem

- den Schülerinnen und Schülern die Mathematik als anwendungsbezogene, alltagsrelevante sowie beweisende, deduzierende und experimentelle Wissenschaft näherbringen
- Kreativität und Fantasie fördern
- befähigen Zusammenhänge und ihre Gesetzmäßigkeiten zu erkennen und mit ihnen umzugehen
- den Schülerinnen und Schülern die kulturelle, historische und philosophische Entwicklung der Mathematik aufzeigen
- als Übungsfeld für Arbeitstechniken sowie Entwicklungsfeld von kognitiven Strategien dienen
- Vernetzungen zwischen den einzelnen Teildisziplinen der Mathematik und mit anderen Wissenschaften verdeutlichen
- zur allgemeinen Studierfähigkeit beitragen.

Er bildet die fachliche Grundlage für diejenigen jungen Menschen, die nach der Schule ein durch mathematische Denkweisen geprägtes Studium- oder Berufsfeld wählen. Dies sind heutzutage neben den mathematischen, naturwissenschaftlichen und technischen Fächern verstärkt Arbeitsfelder in den wirtschafts- und sozialwissenschaftlichen Bereichen.

Daher ergeben sich für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht unter anderem die folgenden **Ziele**:

- Der Unterricht erzieht zu begrifflicher Präzision; er vermittelt die Fähigkeit, Aussagen exakt zu formulieren und logische Schlussfolgerungen zu ziehen.
- Er fördert die Bereitschaft und die Kompetenz zum Argumentieren und Kritisieren.
- Er verwendet verschiedene Stufen des Argumentierens, vom beispielgebundenen Verdeutlichen bis zum formalen Beweisen.
- Der Unterricht schult das Mathematisieren, d.h. die Fähigkeit, reale Situationen in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, die entwickelten Modelle mathematisch zu bearbeiten und die Ergebnisse zu interpretieren.
- Der Unterricht fördert das entdeckende Lernen. Die Ausbildung heuristischer Strategien beim Experimentieren und Probieren befähigt die Schülerinnen und Schüler, Beziehungen und Strukturen zu entdecken und sie zu analysieren.
- Der Unterricht versetzt die Schülerinnen und Schüler in die Lage, aus einer Menge von Informationen die für eine anstehende Aufgabe wesentlichen Informationen herauszufiltern.
- Der Unterricht stärkt und erweitert das Kommunikationsvermögen. Mathematische Sachverhalte werden mündlich und schriftlich dargestellt oder graphisch veranschaulicht. Das Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungsformen, das Formalisieren und das algorithmische und kalkülhafte Arbeiten sind spezifische Formen des mathematischen Ausdrucks. Die Beherrschung der Fachsprache öffnet

den Zugang zu vielen Disziplinen, insbesondere den naturwissenschaftlichen, technischen und wirtschaftswissenschaftlichen Fächern.
- Der Unterricht fördert die Kreativität und Fantasie, indem er auch Elemente des Spielerischen aufweist und die Ästhetik von Darstellungen betont.
- Der Unterricht gibt exemplarisch Einblicke in die historische Genese der Mathematik und ihre Bedeutung für die Entwicklung unserer Gesellschaft.
- Der Unterricht leitet die Schülerinnen und Schüler sowohl zum selbstständigen als auch zum kooperativen Lernen an. Er trägt zur Entwicklung von Selbstbewusstsein und Selbstdisziplin, von Leistungsbereitschaft und Konzentrationsfähigkeit bei.
- Der Unterricht befähigt zu einem weiteren mathematischen oder wissenschaftlichen Studium oder Berufsweg.

1.2 Kompetenzen

Der vorliegende Lehrplan berücksichtigt die in den Bildungsstandards zur allgemeinen Hochschulreife für das Fach Mathematik formulierten prozessbezogenen, allgemein-mathematischen Kompetenzen, ohne eine explizite Kennzeichnung und Zuordnung zu diesen vorzunehmen.
Ganz allgemein sollen die Schülerinnen und Schüler fähig sein
- wissenschaftliche Untersuchungen durchzuführen, entsprechende mathematische Modelle zu finden bzw. vorliegende Modelle kritisch zu reflektieren (Modellieren)
- Beweise und Begründungen durchzuführen (Argumentieren und Beweisen)
- geeignete Hilfsmittel zur Problemlösung auszuwählen und einzusetzen (Probleme lösen)
- sich über Mathematik, die Ergebnisse und Wege von Lösungen sowohl mündlich als auch schriftlich auszutauschen (Kommunizieren)
- Informationen aus Darstellungen zu entnehmen und umgekehrt Ergebnisse geeignet darzustellen
- mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umzugehen.

1.3 Didaktische Hinweise

Der Lehrplan ist nach einzelnen Lernbereichen gegliedert.
In zwei Spalten werden jeweils der verbindliche Inhalt und die verbindlichen zu erwartenden Kompetenzen aufgeführt. Die Zuordnung der erwarteten Kompetenzen zu den Inhalten schließt nicht aus, dass weitere Fähigkeiten von den Schülerinnen und Schülern erworben werden können.
Es erscheint sinnvoll, verschiedene Inhalte und Kompetenzen zu vernetzen und in anderen Zusammenhängen immer wieder aufzugreifen, so dass ein spiralförmiges vertiefendes Lernen möglich wird.
Die Reihenfolge der einzelnen Themen ist nur insoweit verbindlich, wie es sachlogisch geboten erscheint. Darüber hinaus nimmt sie aber die didaktisch-methodischen Entscheidungen der Lehrkraft bzw. der Fachkonferenzen Mathematik nicht vorweg.

1.4 Hinweise zur Abiturprüfung und dem Einsatz elektronischer Hilfsmittel

In weiten Teilen des Alltagslebens und nahezu allen Bereichen des Berufslebens, in denen höher qualifizierte Tätigkeiten ausgeübt werden, ist es von Bedeutung quantitative Zusammenhänge und abstrakte Strukturen zu erfassen und zu bearbeiten. Dabei kommen heuristische Vorgehensweisen, Problemlösestrategien und Verfahren zum Tragen, die weit über die elementaren Rechentechniken hinausgehen. Hier bieten der grafikfähige Taschenrechner (GTR) und entsprechende (dynamische) Mathematiksoftware Möglichkeiten und Hilfestellungen. Der Einsatz von elektronischen Hilfsmitteln fördert zusätzlich das Verstehen der zugrunde liegenden mathematischen Methoden und ermöglicht eine kritische Auseinandersetzung mit Möglichkeiten und Grenzen der Hilfsmittel.

Ein grafikfähiger Taschenrechner ist daher in allen S-Zweigen im Unterricht und in den Prüfungen einzusetzen. Die Schülerinnen und Schüler sind zu einem zielgerichteten und kritischen Umgang mit dem GTR anzuleiten.

2 Inhalte und Kompetenzen

2.1 Folgen

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Allgemeines zu Folgen • Definition einer Folge, Indexschreibweise • Bildungsgesetze von Folgen - explizit - rekursiv - Beschreibung einer Folge in Wortform • graphische Darstellung einer Folge • Monotonie einer Folge - konstante Folgen - wachsende Folgen - fallende Folgen, - nach oben beschränkte Folgen, - nach unten beschränkte Folgen, - beschränkte Folgen	Die Schülerinnen und Schüler • untersuchen und modellieren konkrete Situationen mit Hilfe von Folgen • stellen Folgen graphisch dar und ziehen hieraus Schlüsse auf Eigenschaften der Folge • untersuchen das Monotonieverhalten einer Folge.
Das Prinzip der vollständigen Induktion	Die Schülerinnen und Schüler • erklären die Beweismethode der vollständigen Induktion • wenden diese an ausgewählten Beispielen an (Partialsumme der ersten n natürlichen Zahlen bzw. Quadratzahlen, Nachweis arithmetischer Eigenschaften wie „4 ist ein Teiler von $5^{n} - 1$“).
Arithmetische Folgen • Definition • graphische Darstellung • (Konstruktion) • explizite und rekursive • Bildungsgesetze • Partialsumme • Grenzwert	Die Schülerinnen und Schüler • kennen die Definition einer arithmetischen Folge • können arithmetische Folgen graphisch darstellen • wandeln die rekursive Darstellung in die explizite um und umgekehrt • berechnen die Partialsumme arithmetischer Folgen.
Geometrische Folgen	

- Definition - graphische Darstellung (Konstruktion) - explizite und rekursive Bildungsgesetze - Partialsumme - Grenzwert, Konvergenzkriterium	Die Schülerinnen und Schüler - kennen die Definition einer geometrischen Folge - können geometrische Folgen graphisch darstellen - wandeln die rekursive Darstellung in die explizite um und umgekehrt - berechnen die Partialsumme geometrischer Folgen - formulieren das Konvergenzkriterium einer geometrischen Folge (-1 < q < 1) und wenden es an.
Das Verhalten von Zahlenfolgen im Unendlichen - Konvergente Folgen, divergente Folgen - Eindeutigkeit des Grenzwerts - Grenzwertsätze - Grenzwert einer Folge, die durch einen Funktionsterm gegeben ist - Grenzwerte von Referenzfolgen $n^p, \frac{1}{n^p}$ mit $p \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n}$ - Vergleichssätze - Einschnürungssatz - Konvergenz und Divergenz arithmetischer und geometrischer Folgen	Die Schülerinnen und Schüler - wenden eine Tabellenkalkulation an, um den Grenzwert einer Folge experimentell zu bestimmen - weisen die Konvergenz einer Folge (u_n) gegen den Grenzwert ℓ nach, indem sie folgendes Kriterium verwenden: „Eine Folge (u_n) konvergiert genau dann gegen ℓ, wenn die Folge $(u_n - \ell)$ eine Nullfolge ist.“ - bestimmen den Grenzwert einer Folge mit Hilfe der Grenzwerte der Referenzfolgen und den Konvergenzsätzen. - beweisen den folgenden Satz: „Gegeben sind zwei Folgen (u_n) und (v_n) mit $u_n \leq v_n$ ab einem bestimmten Index n. Ist $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} v_n = \infty$.“ - weisen mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung die Divergenz der Folge (q^n) für $q > 1$ nach. - verwenden das Monotonieprinzip, um die Konvergenz einer Folge zu begründen

2.2 Analysis – Fortführung von Funktionen

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Bildung neuer Funktionen aus gegebenen Funktionen • Verkettung von Funktionen • Umkehrfunktion • Symmetrie der Graphen von Funktionen	Die Schülerinnen und Schüler • verketten zwei Funktionen und stellen eine Funktion als Verkettung dar • begründen die Umkehrbarkeit einer Funktion und stellen gegebenenfalls die Umkehrfunktion auf • leiten aus der Symmetrie der Funktionsgraphen die Eigenschaften der Umkehrfunktion her.

Grenzwerte
 	
• Grenzwerte von Funktionen im Unendlichen
• Grenzwerte von Funktionen an einer Stelle
• Vergleichssätze, Einschnürungssatz
• Asymptoten
  - waagerechte
  - senkrechte
  - schiefe
	Die Schülerinnen und Schüler
	• geben die Grenzwerte grundlegender Funktionen an und können Grenzwerte von Summen, Produkten, Quotienten und Verkettungen dieser Funktionen bestimmen
	• ermitteln Grenzwerte durch Vergleichssätze
	• bestimmen die Asymptoten des Graphen einer gebrochen rationalen Funktion
	• weisen nach, dass eine gegebene Gerade Asymptote des Graphen der zu untersuchenden Funktion ist.

Stetigkeit einer Funktion
 	
• Definition der Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle
• Stetigkeit im Intervall
• Sätze für stetige Funktionen auf Intervallen:
  - Zwischenwertsatz
  - Nullstellensatz
  - Umkehrsatz
	Die Schülerinnen und Schüler
	• veranschaulichen die Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle graphisch
	• erläutern die Begriffe Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit an ausgewählten abschnittsweise definierten Funktionen
	• wenden die Stetigkeitssätze auf Intervallen zur Problemlösung an
	• schließen anhand einer Monotonietabelle bei komplexeren stetigen Funktionen auf die Existenz von Nullstellen in einem Intervall.

Weitere Ableitungsregeln • Produktregel • Quotientenregel • Kettenregel	Die Schülerinnen und Schüler • begründen die Differenzierbarkeit eines Produktes, eines Quotienten usw. • wenden die neuen Ableitungsregeln an.

Hinweise

- Der Begriff der Umkehrbarkeit kann bei der Behandlung von Exponential- und Logarithmusfunktionen (siehe 2.3) verwendet werden.
- Der Begriff der Näherungskurve kann in den Übungen eingeführt werden.
- Es ist eher an eine qualitative Anwendung des Grenzwertbegriffs gedacht. Beweise sollen daher nicht den Mittelpunkt der Untersuchungen bilden. Die Begriffe und Sätze sind eher an Beispielen zu verdeutlichen.
- Die Behandlung des Grenzwertes kann auch im Zusammenhang mit dem Lernbereich „gebrochen rationale Funktionen“ (siehe 2.3) erfolgen.
- An eine ausführliche, bewiesene Einführung und Anwendung des Stetigkeitsbegriffs ist nicht gedacht; die Behandlung der Stetigkeit soll eher qualitativen Charakter haben.
- Beim Ableiten gebrochen rationaler Funktionen sollen im Zähler und Nenner maximal Funktionen 3. Grades stehen.

2.3 Analysis – weitere Funktionsklassen

Verbindlicher Inhalt	**Verbindliche Kompetenzen**
Allgemeine trigonometrische Funktionen $f(x) = a \cdot sin(b \cdot x + c) + d$ $f(x) = a \cdot cos(b \cdot x + c) + d$	Die Schülerinnen und Schüler • zeigen den Einfluss der Konstanten a, b, c und d der allgemeinen Funktionsgleichung auf die Graphen auf • stellen die Analogie zur Bedeutung der Parameter bei quadratischen Funktionen her • modellieren periodische Vorgänge, die durch Messtabellen beschrieben sind.
Gebrochen rationale Funktionen • Definitionsmenge • Differenzierbarkeit und Stetigkeit • Symmetrie (gerade bzw. ungerade Funktionen) • Grenzwerte • Asymptoten • Nullstellen • Monotoniebereiche • Extremstellen • Wendestellen • Graphen	Die Schülerinnen und Schüler • führen ausführliche Kurvendiskussionen gebrochen rationaler Funktionen durch.

Exponentialfunktionen • natürliche Exponentialfunktion mit Basis e (e-Funktion) • Differenzierbarkeit von $f(x) = b^x$ • Definition der Eulerschen Zahl e • Definition der e-Funktion mit $f(x) = e^x$ • Funktionalgleichung $f' = f$ • Eigenschaften der e-Funktion (Monotonie, Krümmung, Grenzwerte, Asymptoten, Graph und Tangenten) • **allgemeine Exponentialfunktionen mit Basis b** • Definitionsmenge • Wertemenge • Monotonie • Grenzwerte • Graph • Tangenten	Die Schülerinnen und Schüler • geben grundlegende Eigenschaften der Exponentialfunktionen an • kennen e als Basis derjenigen Exponentialfunktion mit $f'(0) = 1$ • formulieren algebraische Eigenschaften der e-Funktion ($e^{x+y} = e^x \cdot e^y, e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, e^{x \cdot y} = (e^x)^y$) • geben den Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ an • führen eine vollständige Kurvendiskussion der e-Funktion durch
Anwendung von Exponentialfunktionen • zusammengesetzte Funktionen • Quotienten, Produkte und Verkettungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen • Verhalten bzw. Grenzwerte von Funktionen mit $f(x) = x^n \cdot e^{cx}$ für $x \to \pm\infty$ ($n \in IN; c \in \mathbb{R}$)	Die Schülerinnen und Schüler • untersuchen Exponentialfunktionen sowie aus der e-Funktion und ganzrationalen Funktionen zusammengesetzte Funktionen • bestimmen das Verhalten von Funktionen des Typs $f(x) = \frac{e^x}{x^n}$ und $f(x) = e^x \cdot x^n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ • stellen den Zusammenhang zwischen allgemeiner Exponentialfunktion und der e-Funktion mit Hilfe der Formel $b^x = e^{x \cdot ln(b)}$ her

Exponentielles Wachstum • Charakteristische Merkmale • Quotientengleichheit • Grenzwertverhalten • Modellieren von Wachstumsprozessen • Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten	Die Schülerinnen und Schüler • geben Beispiele exponentiellen Wachstums an und erkennen Unterschiede zwischen exponentiellem und linearem Wachstum • modellieren exponentielle Wachstums- und Zerfallsprozesse und beurteilen die Relevanz ihres Modells • modellieren konkrete Situationen mit Hilfe einer Differentialgleichung der Form $y' = ay + b$ und lösen diese.
Logarithmus und Logarithmusfunktion • **Logarithmusbegriff** • Definition • Eigenschaften • Logarithmengesetze • **natürliche Logarithmus-Funktion (ln-Funktion)** • Definition • Eigenschaften (Differenzierbarkeit und Ableitung, Stammfunktionen, Monotonie, Krümmung, Wertemenge, Verhalten für $x \to +\infty$ bzw. $x \to 0^+$, Graph) • Funktionaleigenschaften • ln-Funktion als Stammfunktion der Hyperbelfunktion $x \to \frac{1}{x}$, die den Funktionswert 0 an der Stelle 1 annimmt: $\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$. • Wachstum der ln-Funktion • Allgemeine Logarithmusfunktionen zur Basis b $(b > 0)$ • **zusammengesetzte Funktionen** Quotienten, Produkte und Verkettungen der ln-Funktion mit ganzrationalen Funktio-	Die Schülerinnen und Schüler • erläutern den Begriff des Logarithmus und kennen $log_b(x)$ als Lösung von $b^y = x$ • formulieren grundlegende Eigenschaften und die Logarithmengesetze sowie deren Folgerungen und wenden sie an • lösen logarithmische Gleichungen bzw. Ungleichungen mit Hilfe der Logarithmengesetze • kennen den folgenden Zusammenhang und wenden ihn zur Berechnung allgemeiner Logarithmen an: $log_b(x) = \frac{log_c(x)}{log_c(b)} = \frac{ln(x)}{ln(b)}$ • formulieren die Definition der *ln*-Funktion sowie ihre Eigenschaften und die grundlegenden Funktionaleigenschaften $ln(x_1 \cdot x_2) = ln(x_1) + ln(x_2)$ $ln(x^r) = r \cdot ln(x)$ • erkennen den folgenden Zusammenhang: $b^x = e^{x \cdot ln(b)}$ • wenden die äquivalenten Gleichungen $\ln(a) = b \Leftrightarrow a = e^b$ an • kennen die *ln*-Funktion als die Stammfunktion von $x \to \frac{1}{x}$, die den Funktionswert 0 an der Stelle 1 besitzt: $ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt$ • bestimmen eine lineare Approximation der Funktion $\ln(x+1)$ an der Stelle $x = 0$

nen • **Verhalten von Funktionen mit $\boldsymbol{f(x) = x^n \cdot ln(x)}$ für $\boldsymbol{x \to +\infty}$ bzw. $\boldsymbol{x \to 0^+ (n \in IN)}$** • **Stammfunktionen** zu $f(x) = \frac{g\prime(x)}{g(x)}$ (logarithmisches Integrieren)	• lösen logarithmische Gleichungen bzw. Ungleichungen mit Hilfe der Logarithmengesetze • zeigen mit Hilfe des Differentialquotienten, dass $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ • wenden die Grenzwerte an • drücken $\log_a x$ mit Hilfe von $ln(x)$ aus • leiten ausgehend von $ln(x)$ Eigenschaften der allgemeinen Logarithmusfunktionen $\log_a x$ ab. • untersuchen aus der ln-Funktion und ganzrationalen Funktionen zusammengesetzte Funktionen • bestimmen das Verhalten von Funktionen mit $f(x) = x^n \cdot ln(x)$ für $x \to +\infty$ bzw. $x \to 0^+$ $\boldsymbol{(n \in IN)}$

Hinweise

- Allgemein sollen bei den gebrochen rationalen Funktionen keine zu komplizierten Nennerfunktionen verwendet werden (Beschränkung bis zum Grad 2).
- Wendepunkte werden lediglich durch die Vorzeichenuntersuchung der zweiten Ableitung bestimmt.
- Kurvenscharen sollen das Gebiet abrunden, allerdings nicht im Mittelpunkt der Untersuchung stehen.
- Die Bestimmung schiefer Asymptoten kann mittels Polynomdivision erfolgen.
- Der Begriff der Näherungskurve kann eingeführt werden.
- Beim Lösen von Differentialgleichungen kann das Superpositionsprinzip verwendet werden: „Die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich als Summe aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung.“
- Die ln-Funktion kann entweder als Umkehrfunktion der e-Funktion eingeführt werden oder alternativ als $ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ – sofern die Integralrechnung schon eingeführt wurde.
- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll sich bei der Behandlung des allgemeinen Logarithmus auf Basen $b > 1$ beschränkt werden.

2.4 Analysis – Integralrechnung

Verbindlicher Inhalt	**Verbindliche Kompetenzen**
Integral und Stammfunktion • Einführung des Integrals	Die Schülerinnen und Schüler

• Eigenschaften des Integrals (Linearität, Intervalladditivität) • Integrationsregeln (Summenregel, Faktorregel) • Bestimmtes Integral • Stammfunktionen • Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung • Ordnungstreue • Mittelwertsatz der Integral-rechnung • Mittelwerte der Funktionswer-te einer Funktion • Anwendungen des Integrals • Flächenberechnungen • partielle Integration	• geben Methoden der näherungsweisen Bestimmung von Flächen (z.B. ein- und umbeschriebene Rechtecke) an und können diese anwenden • kennen die Bedeutung sowie die Eigenschaften des Integrals • erklären den Begriff der Stammfunktion und geben zu einer Funktion eine Stammfunktion an • begründen, dass es zu einer Funktion mehrere Stammfunktionen gibt, die sich durch additive Konstanten unterscheiden • berechnen bestimmte Integrale mit Hilfe der Formel $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$ • können krummlinig begrenzte Flächen mit Hilfe des Mittelwertsatzes in Rechteckflächen umwandeln • lösen anwendungsorientierte Probleme mit Hilfe der Integralrechnung • ermitteln krummlinig begrenzte Flächeninhalte mit Hilfe der Integralrechnung • können partiell integrieren.

2.5 Vektorielle Geometrie – Grundlagen

Verbindlicher Inhalt	**Verbindliche Kompetenzen**
Transformationen in der Ebene • Verschiebungen • Spiegelungen • Drehungen • Streckungen	Die Schülerinnen und Schüler • konstruieren Bildfiguren, die durch Ähnlichkeitsabbildungen entstehen • zeigen die Auswirkungen dieser Abbildungen auf Punktlage, Winkel, Längen, Flächeninhalte und Volumen auf • wenden die Ergebnisse bei einfachen Beweisführungen an.
Vektoren und Vektorrechnung im Raum	Die Schülerinnen und Schüler • stellen Repräsentanten in einem kartesischen Koordinatensystem dar • übertragen die für Vektoren in der Ebene

	bekannte Begriffsbildung und geltenden Rechenregeln auf Vektoren im Raum.
Kollinearität und Komplanarität • lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren im Raum	Die Schülerinnen und Schüler • entscheiden, ob zwei Vektoren bzw. drei Vektoren kollinear bzw. komplanar sind • verdeutlichen diese Eigenschaften geometrisch und weisen sie analytisch nach.

Das Skalarprodukt in der Ebene und im Raum
 	
• Definition
• Eigenschaften
• Winkel zwischen zwei Vektoren
• Rechenregeln
• Betrag eines Vektors
• Orthogonalität zweier Vektoren
• Anwendungen des Skalarprodukts in der Ebene und im Raum
  - Winkelberechnung
  - Längenberechnung
  - Additionstheoreme der Trigonometrie
	Die Schülerinnen und Schüler
	• geben das Skalarprodukt analytisch oder mit Hilfe des eingeschlossenen Winkels zwischen zwei Vektoren an
	• wandeln diese Darstellungen ineinander um und wenden sie an
	• wenden die Rechenregeln für das Skalarprodukt an
	• stellen den Zusammenhang zwischen dem Skalarprodukt und dem Betrag eines Vektors her
	• wenden die Definition orthogonaler Vektoren an und weisen die Orthogonalität zweier Vektoren mit Hilfe des Skalarprodukts nach
	• berechnen mit Hilfe des Skalarproduktes den Winkel zwischen zwei Geraden bzw. zwischen zwei Ebenen
	• setzen das Skalarprodukt zum Beweis geometrischer Sätze (Satz des Apollonius, Sinus- und Kosinussatz, Satz des Thales) ein
	• wenden die Formeln der Additionstheoreme, des Höhen-, Sinus- und Kosinussatzes im Zusammenhang mit dem Skalarprodukt an.

Das Vektorprodukt • Definition • Eigenschaften • Rechengesetze • Anwendung des Vektorprodukts - Nachweis der Kollinearität von Vektoren	Die Schülerinnen und Schüler • kennen die Definition und Eigenschaften des Vektorprodukts sowie die grundlegenden Rechengesetze $\vec{u}x\vec{v} = -\vec{v}x\vec{u}$ und $\vec{u}x(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}x\vec{v} + \vec{u}x\vec{w}$

- Flächeninhalt eines Parallelogramms und eines Dreiecks - Normalenvektor einer Ebene	• weisen mit Hilfe des Vektorproduktes nach, ob zwei Vektoren kollinear sind oder nicht • berechnen mit Hilfe des Vektorproduktes den Flächeninhalt eines Parallelogramms und eines Dreiecks sowie den Normalenvektor einer Ebene.

Hinweis

- Alle Inhalte der Vektorrechnung werden analytisch behandelt.

2.6 Vektorielle Geometrie – Objekte im Raum

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Geraden im Raum • Darstellung einer Geraden im Raum - Zweipunktegleichung - vektorielle Parametergleichung	Die Schülerinnen und Schüler • stellen eine Parameterdarstellung einer Geraden auf und begründen, dass diese nicht eindeutig ist.
Ebenen im Raum • Darstellung einer Ebene im Raum - Dreipunktegleichung - vektorielle Parametergleichung mit zwei nicht kollinearen Spannvektoren - Normalengleichung - Koordinatengleichung	Die Schülerinnen und Schüler • stellen Ebenengleichungen auf und verwenden sie zielführend in verschiedenen Kontexten • wandeln Ebenengleichungen ineinander um.
Lagebeziehungen und Schnittwinkel • Lage von Geraden zueinander • Lage einer Geraden zu einer Ebene • Lage von Ebenen zueinander • Schnittwinkel zwischen zwei Geraden, einer Geraden und	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen die Lagebeziehungen zwischen Geraden und Ebenen im Raum • bestimmen ggf. ihre Schnittmengen • berechnen den Schnittwinkel zwischen diesen Objekten.

einer Ebene und zwischen zwei Ebenen	
Abstände • Abstand eines Punktes von einer Ebene • Abstand eines Punktes von einer Geraden • Abstand paralleler Geraden • Abstand einer Geraden von einer zu ihr parallelen Ebene • Abstand zweier paralleler Ebenen	Die Schülerinnen und Schüler • führen Abstandsberechnungen durch.
Der Kreis • Koordinatengleichung des • Kreises • Vektorgleichung des Kreises	Die Schülerinnen und Schüler • wandeln eine Darstellungsform in die andere um.

Die Kugel
 	
• Koordinatengleichung der Kugel
• Vektorgleichung der Kugel
• Lagebeziehungen
  - Kugel-Gerade
  - Kugel-Ebene
  - Kugel-Kugel
• Schnitt zweier Kugeln
	Die Schülerinnen und Schüler
	• wandeln eine Darstellungsform in die andere um
	• untersuchen Lagebeziehungen zwischen den angegebenen geometrischen Objekten
	• bestimmen beim Schnitt zweier Kugeln den Schnittkreis.

Hinweise

- Die Untersuchung von Lagebeziehungen im Raum bietet die Möglichkeit, lineare Gleichungssysteme aufzustellen und zu lösen.
- Als Anwendung der Abstandsberechnungen bieten sich Spiegelungen von einem Punkt an einer Ebene oder an einer Geraden an.
- Parameterdarstellungen des Kreises sind nicht vorgesehen.
- Kugelscharen können ergänzend behandelt werden.

2.7 Komplexe Zahlen

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen • verschiedene Darstellungen komplexer Zahlen - algebraische Form $z = a + bi$ - Polarform - $z = r \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$ - Exponentialform ○ $z = r \cdot e^{i \cdot \alpha}$ mit $r = \|z\|$, ○ $\alpha = \mathrm{Arg}(z)$ - Komplexe Zahl als Zeiger eines Punktes oder eines Vektors in der Gauß-schen Zahlenebene • Konjugiert Komplexe $\bar{z} = a - b \cdot i$	Die Schülerinnen und Schüler • verwenden die verschiedenen Darstellungen • wandeln kontextbezogen eine Darstellungsform in die andere um • verwenden die Begriffe Realteil, Imaginärteil, Konjugierte, Betrag und Argument. • interpretieren die verschiedenen Darstellungsformen geometrisch.
Rechnen mit komplexen Zahlen • Addition • Subtraktion • Multiplikation • Division • Betrag und Argument eines Produktes bzw. eines Quotienten	Die Schülerinnen und Schüler • führen die Grundrechenarten mit allen Darstellungsformen komplexer Zahlen durch • interpretieren sowohl das Argument als auch den Betrag des Quotienten $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ geometrisch • zeigen hiermit geometrische Eigenschaften von gegebenen Figuren auf.
Gleichungen in der Menge $\mathbb{C}$	

• Lösen von quadratischen Gleichungen mit komplexen Koeffizienten • Bestimmung von Nullstellen von Polynomen vom Grad n ≤ 3 • Die Moivre'sche Formel • $z = r \cdot e^{i\alpha} \;\Rightarrow\; z^n = r^n e^{i \cdot n \cdot \alpha}$ • Die n-ten Einheitswurzeln $z^n = 1$ • Die Gleichung $z^n = q$	Die Schülerinnen und Schüler • berechnen die Quadratwurzeln komplexer Zahlen und lösen quadratische Gleichungen mit komplexen Koeffizienten • bestimmen die Nullstellen von komplexen Polynomen vom Grad n ≤ 3 bei gegebener Nullstelle und zerlegen diese in Linearfaktoren • berechnen die n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl und verdeutlichen diese geometrisch.
Gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildungen	Die Schülerinnen und Schüler • erkunden lineare Abbildungen der komplexen Zahlen $z \to a \cdot z + b$ und sie beschreiben diese geometrisch in der Gauß'schen Zahlenebene (gegebenenfalls durch den Drehwinkel, den Streckungsfaktor und den Fixpunkt): - identische Abbildung, wenn $a = 1$ und $b = 0$ - Translation: $z \mapsto z + b$, wenn $b \neq 0$ - Streckung: $z \mapsto a \cdot z + b$ wenn $a \neq 1$ und $a \in \mathbb{R}^*$ - Drehung, wenn $\lvert a \rvert = 1$ und $a \neq 1$ - gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung, wenn $a \neq 1$ und $a \notin \mathbb{R}$ • stellen eine gleichsinnige Ähnlichkeitsabbildung in eindeutiger Weise als eine kommutative Verkettung einer Streckung und einer Drehung mit dem gleichen Zentrum dar.

Hinweise

- Die Rechenoperationen sollen „von Hand“ beherrscht werden. Dabei sollen z.B. bei der Division keine „Formeln“ auswendig gelernt werden, sondern „Verfahren“ eingeübt werden.
- Für n > 2 soll das Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen komplexer Polynome an einfachen Beispielen erläutert werden. Dabei sollen die Lösungen auch geometrisch interpretiert werden.

2.8 Statistik und Wahrscheinlichkeit

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen

Beschreibende Statistik und Datenanalyse
 	
• Streumaße:
  - Varianz
  - Standardabweichung
 	
• Boxplot
	Die Schülerinnen und Schüler
	• kennen die Definition und Bedeutung der beiden Streumaße Varianz und Standardabweichung
	• wenden die beiden Begriffspaare „arithmetisches Mittel und Standardabweichung“ bzw. „Median und Quartile“ zur Beschreibung einer Datenreihe sinnvoll an
	• untersuchen eine Datenreihe und stellen Zusammenhänge zwischen zwei Datenreihen mithilfe einer Software oder eines Taschenrechners her.

Grundlagen zur Wahrscheinlichkeit
 	
• wichtige Definitionen und Grundbegriffe
  - Zufallsexperiment
  - Ergebnisse des Zufallsexperiments
  - relative Häufigkeit eines Ergebnisses
  - Empirisches Gesetz der großen Zahlen
  - Wahrscheinlichkeit
  - Elementarereignisse
  - Ereignisse
 	
• Einfache Zufallsexperimente
  - Laplace-Experiment
  - Bernoulli-Experiment
	Die Schülerinnen und Schüler
	• wenden die Grundbegriffe und Definitionen sicher an
	• entscheiden, ob Zufallsexperimente Laplace- bzw. Bernoulli-Experimente sind.

Mehrstufige Zufallsexperimente
 	
• Pfadregeln
  - Multiplikationsregel
  - Additionsregel
• Baumdiagramm (komplett oder vereinfacht)
• Vierfeldertafeln
	Die Schülerinnen und Schüler
	• drücken bei n-stufigen Zufallsexperimenten die Ergebnisse als n-Tupel aus
	• verwenden die Pfadregeln (mit oder ohne Hilfe eines Baumdiagramms bzw. einer Vierfeldertafel), um Wahrscheinlichkeiten bei n-stufigen Zufallsexperimenten zu berechnen.

Kombinatorik • Rechenregeln, n-Fakultät, k-	Die Schülerinnen und Schüler

Permutationen, Kombinationen • Urnenmodelle mit und ohne Beachtung der Reihenfolge - Ziehen mit Zurücklegen - Ziehen ohne Zurücklegen - Permutationen von k Objekten - gleichzeitiges Ziehen von k aus n Objekten	• drücken bei n-stufigen Zufallsexperimenten die Ergebnisse als *n*-Tupel aus • verwenden die Pfadregeln (mit oder ohne Hilfe eines Baumdiagramms bzw. Vierfeldertafel), um Wahrscheinlichkeiten zu berechnen • wenden die Rechenregeln der Kombinatorik an.
Diskrete Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung • Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsgröße • Erwartungswert der Zufallsgröße • Varianz und Standardabweichung der Zufallsgröße	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße und wenden sie an • stellen die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße in Form einer Tabelle oder eines Schaubildes dar • interpretieren den Erwartungswert im Falle einer hohen Anzahl von Wiederholungen als arithmetisches Mittel (Häufigkeitsinterpretation des Erwartungswertes) • bestimmen den Erwartungswert, die Varianz und Standardabweichung einer Zufallsgröße unter Verwendung des GTR oder einer Software • wenden die Formeln $E(aX+b)=a\cdot E(X)+b$ und $V(aX+b)=a^2\cdot V(X)$ zu Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße an ohne sie zu beweisen.
Binomialverteilung • Bernoulli-Ketten, Binomialverteilung • Verteilungsfunktion • Erwartungswert und Varianz einer Binomialverteilung	Die Schülerinnen und Schüler • erkennen anhand der Baumdiagrammdarstellung, dass die Binomialkoeffizienten die Anzahl der Pfade für k Treffer bei n Versuchen angeben • berechnen Wahrscheinlichkeiten und kumulierte Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Binomialverteilung unter Verwendung eines GTR oder von Tabellenwerten • berechnen und interpretieren den Erwartungswert und die Varianz einer Binomialverteilung.

Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit • bedingte Wahrscheinlichkeit • Unabhängigkeit zweier Ereignisse • Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit	Die Schülerinnen und Schüler • kennen den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit und gehen sicher mit der Notation $\mathrm{P_A(B)}$ um • stellen eine Situation mit Hilfe eines Baumdiagramms oder einer Vierfeldertafel dar • berechnen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit in der Form $P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$
Stetige Zufallsgrößen und der Begriff der Dichtefunktion • Bezeichnung „stetige Zufallsgröße“ • Begriff der Dichtefunktion • Gleichmäßige Verteilung auf $[a; b]$ • Erwartungswert einer gleichmäßig verteilten Zufallsgröße • Zusammenhang zwischen Dichtefunktion auf einem Intervall und stetiger Verteilungsfunktion	Die Schülerinnen und Schüler • unterscheiden exemplarisch zwischen einer diskreten und einer stetigen Zufallsgröße • geben die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer gleichmäßig verteilten Zufallsvariable auf einem Intervall [a,b] an und berechnen Wahrscheinlichkeiten • geben die Definition einer Dichtefunktion an und überprüfen an ausgewählten Beispielen, ob eine Funktion eine Dichtefunktion ist.
Exponentialverteilung	Die Schülerinnen und Schüler • berechnen Wahrscheinlichkeiten im Zusammenhang der Exponentialverteilung • bestimmen den Erwartungswert einer Exponentialverteilung durch $\lim_{x\to\infty} \int_0^x t \cdot f(t)\, dt$, wobei f die Dichtefunktion der Exponentialverteilung darstellt. • erkennen, dass der Erwartungswert einer exponentialverteilten Zufallsvariable mit Parameter λ durch $\frac{1}{\lambda}$ gegeben ist.
Gauß-Funktion φ und Gaußsche Integralfunktion Φ • Normalverteilung $\Phi_{\mu,\sigma}$ mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ	Die Schülerinnen und Schüler • kennen die Begriffe Normalverteilung und Standardnormalverteilung • erläutern, dass man bei einem genügend großen Stichprobenumfang die

• Standardnormalverteilung • Näherungsformel von De Moivre-Laplace	Histogrammme durch einen stetigen Graphen annähern kann (exemplarisch durch die Gaußsche Glockenkurve bei binomialverteilten Zufallsgrößen) • geben die Funktionsgleichung der Dichtefunktion φ ($\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$) der Standardnormalverteilung an und stellen diese graphisch dar • kennen die Funktionsgleichung, den Graphen und die Eigenschaften der zugehörigen Integralfunktion Φ • kennen die Definition, dass eine Zufallsgröße X der Normalverteilung $\Phi_{\mu,\sigma}$ genügt, wenn die Zufallsgröße $\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt ist • verwenden zur Berechnung einer Wahrscheinlichkeit, der eine Normalverteilung $\Phi_{\mu,\sigma}$ zugrunde liegt, einen GTR, Tabellen oder Tabellenwerte der Standardnormalverteilung • verwenden die Näherungen $u_{0,05} \approx 1{,}96$ und $u_{0,01} \approx 2{,}58$ • berechnen Wahrscheinlichkeiten mit der Näherungsformel von De Moivre-Laplace.
Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe • Simulation von Stichproben vom Umfang n • Bestimmen von Prognoseintervallen für 95%ige Wahrscheinlichkeiten • Entscheidungsfindung, ob eine relative Häufigkeit im Prognoseintervall liegt	Die Schülerinnen und Schüler • konzipieren Simulationen konkreter Situationen, führen diese durch und erkunden bzw. werten sie mit Hilfe des GTR oder von Tabellenwerten aus • bestimmen in einem Zufallsexperiment unter Verwendung des GTR oder einer Tabelle bei einem gegebenen Signifikanzniveau ein Prognoseintervall und entscheiden mit Hilfe der Binomialverteilung, ob eine Hypothese abgelehnt werden kann oder nicht bzw. ob eine relative Häufigkeit im Prognoseintervall liegt • entwickeln bei großen Stichproben ein Gefühl für signifikante Abweichungen von Ergebnissen vom erwarteten Wert • erkennen, dass in der Praxis für Stichproben von genügend großem Umfang (n>25) und Wahrscheinlichkeiten p zwischen 0,2 und 0,8 die Abschätzung $\left[\mathrm{p} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}}, \mathrm{p} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n}}}\right]$ des 95%-Prognoseintervalls verwendbar ist.

Verhalten von Prognoseintervallen	Die Schülerinnen und Schüler • geben das 95%-Prognoseintervall mit $\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ $=\left[p-1{,}96\cdot\frac{\sigma}{n}; p+1{,}96\cdot\frac{\sigma}{n}\right]$ an, wobei p die angenommene Proportion ist • geben die Bedingungen für die Näherungen an: $n \geq 30, np \geq 5$ und $n(1-p) \geq 5$.
Schätzen von Parametern • Konfidenzintervalle • Stichprobenumfang • Sicherheitswahrscheinlich-Keit	Die Schülerinnen und Schüler • geben Intervalle an, in denen die gegebene relative Häufigkeit mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% liegt • schätzen den Umfang der Stichprobe zu einer maximalen relativen Abweichung vom wirklichen Anteil bei einer gegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% ab.
Testen von Hypothesen • Nullhypothese • Alternativhypothese • Entscheidungsregeln • Fehler 1. und 2. Art • Irrtumswahrscheinlichkeit	Die Schülerinnen und Schüler • nutzen Binomialverteilungen, um Hypothesentests durchzuführen • formulieren anhand vorgegebener Testanordnungen die Nullhypothese H_0 und die Alternativhypothese H_1 und geben kritische Bereiche, Entscheidungsregeln und den Fehler 1. und 2. Art an.

Hinweise

- Ein axiomatischer Wahrscheinlichkeitsbegriff ist nicht vorgesehen.
- In der Kombinatorik ist eine Einschränkung auf Situationen mit einfachen kombinatorischen Berechnungen zu beachten.
- Die mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit verbundene Begriffsbildung wird von den Schülerinnen und Schülern nicht erwartet, aber sie sollen sicher sein im Einsatz der Formel.
- Auf eine Behandlung allgemeiner Dichtefunktionen auf einem nichtbeschränkten Intervall soll verzichtet werden.
- Im Zusammenhang mit der Standardnormalverteilung kann man beweisen, dass der Erwartungswert gleich 0 ist. Ein formaler Beweis dafür, dass die als $E((X-E(X))^2)$ definierte Varianz gleich 1 ist, wird nicht verlangt.
- Die Kenntnis des Funktionsterms der allgemeinen Dichtefunktion der Normalverteilung $\Phi_{\mu,\sigma}$ wird nicht verlangt.
- Die besprochenen Aufgaben beim Testen von Hypothesen beschränken sich auf Anwendungen der Binomialverteilung. Es soll aber darauf hingewiesen werden, dass auch Hypothesentests mit anderen Wahrscheinlichkeitsverteilungen existieren.

2.9 Arithmetik

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Teilbarkeit und Division mit Rest **Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$** • Vielfache und Teiler • Teilbarkeitsregeln • Teilermengen, Vielfachen-mengen	Die Schülerinnen und Schüler • erklären die Vielfachen und Teiler einer Zahl und verwenden diese Begriffe • geben die Teilbarkeitsregeln an und wenden diese an.
Ganzzahlige Division mit Rest • Satz über die ganzzahlige Division mit Rest (Euklidischer Divisionsalgorithmus)	Die Schülerinnen und Schüler • formulieren den Satz über Division mit Rest und wenden diesen an.
Kongruenzen	Die Schülerinnen und Schüler • geben die Kongruenzregeln an und wenden diese an.
GGT – TEILERFREMDHEIT – KGV UND ggT • Gemeinsame Teiler zweier Zahlen • Euklidischer Algorithmus • Eigenschaften des ggT	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen den ggT zweier ganzen Zahlen mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.
Teilerfremde Zahlen • Definition und Eigenschaften • Lemma von Bézout • Produktteilersatz	Die Schülerinnen und Schüler • geben das Lemma von Bézout an und wenden es an • wenden den Produktteilersatz an • lösen lineare diophantische Gleichungen der Form $ax + by = c$.
KgV • Definition und Eigenschaften	Die Schülerinnen und Schüler

• Zusammenhang zwischen ggT und kgV	• verwenden die Gleichung $a \cdot b = ggT(a,b) \cdot kgV(a,b)$, um das kgV zu ermitteln
PRIMZAHLEN **Primteiler einer natürlichen Zahl** • Der Begriff Primzahlen • Primzahlkriterium • Eigenschaften • Unendlichkeit der Primzahlmenge	Die Schülerinnen und Schüler • testen, ob eine natürliche Zahl n eine Primzahl ist, indem sie Primteiler von n bestimmen, die $\leq \sqrt{n}$ sind • wenden folgende Folgerung des Produktteilersatzes: „Teilt eine Primzahl ein Produkt von Zahlen, so teilt sie auch einen der Faktoren des Produktes."
Primfaktorzerlegung einer ganzen Zahl • Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie • Anwendung des Hauptsatzes zur • Ermittlung von Teiler und Vielfachen einer Zahl • Bestimmung von ggT und kgV zweier Zahlen	Die Schülerinnen und Schüler • bestimmen die Primfaktorzerlegung einer Zahl und wenden diese Darstellung zur Bestimmung von ggT und kgV zweier Zahlen an.

Hinweise

In der Kryptographie finden sich umfangreiche Anwendungen der reinen Mathematik im Alltag, z.B. Strichcodes, ISBN-Codes, IBAN-Codes, INSEE-Codes, Verschlüsselungsprobleme (affin-lineare Chiffre, die Chiffrierung von Vigenere, die Hill-Chiffre). Eine Heranführung an das RSA-Kryptosystem ist denkbar.
Es können spezielle Primzahlen (Fermat-, Mersenne-Primzahlen)behandelt werden.

2.10 Matrizen

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Allgemeines zu Matrizen • Matrix, einzeilige Matrix, einspaltige Matrix, Quadratische Matrix	Die Schülerinnen und Schüler • formulieren aus einer Problemstellung eine Matrix und stellen die die Problemstellung graphisch dar.

• Ordnung einer Matrix (Größe einer Matrix)	
Rechnen mit Matrizen • Matrizenaddition • Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar • Matrizenmultiplikation • Inverse Matrix	Die Schülerinnen und Schüler • interpretieren die Matrizenmultiplikation als Hintereinanderausführung eines mehrstufigen Prozesses • bestimmen die inverse Matrix einer invertierbaren 2x2-Matrix. • setzen den Taschenrechner für die Bestimmung der inversen Matrix einer invertierbaren 3x3-Matrix ein • interpretieren, je nach Kontext, die inverse Matrix als zugehörige Matrix des umgekehrten Prozesses • bestimmen die n-te Potenz einer 2x2- oder 3x3-Matrix durch Rekursion.
Übergangsmatrizen	Die Schülerinnen und Schüler • übertragen einen Graphen in eine Matrix und umgekehrt.
Lineare Gleichungssysteme lösen	Die Schülerinnen und Schüler • übertragen ein lineares Gleichungssystem in eine Matrix und lösen es.
Matrizenfolgen • Rekursive Folge einspaltiger Matrizen (U_n) mit $U_{n+1} = AU_n + C$ • Ermittlung einer konstanten Folge, die die Rekursionsgleichung erfüllt • Konvergenzuntersuchung.	Die Schülerinnen und Schüler • lösen angeleitet Aufgaben, bei denen Matrizenfolgen vorkommen.

2.11 Algorithmik

Verbindlicher Inhalt	Verbindliche Kompetenzen
Algorithmik • Symbolsprache • Tabellenkalkulation • Erstellung von geeigneten Programmen	Die Schülerinnen und Schüler • können manche Algorithmen sowohl in Symbol- als auch in natürliche Sprache zu beschreiben, • können manche Algorithmen, mit Hilfe von Tabellenkalkulation oder GTR oder einer geeigneten Software im Unterricht zu erstellen, • interpretieren aufwendigere Algorithmen • sind in der Lage, ein Programm zur Berechnung von Funktionenwerten zu erstellen • können ein iteratives Verfahren, dass bei Erfüllung der Schleifenbedingung endet, zu programmieren.

Hinweise

Es ist keine Programmiersprache oder Software vorgeschrieben.
Die Algorithmik fügt sich in allen Gebieten der Mathematik ein. Daher müssen die gestellten Aufgaben sowohl mit den verschiedenen Lernbereichen des Lehrplans (Analysis, Geometrie, Statistik und Stochastik, Arithmetik), als auch mit anderen Fachgebieten verknüpft sein oder sich mit konkreten Problemen befassen.
Im Rahmen der Erstellung von Algorithmen und Programmen, welche mit systematischen Kontrollen einhergeht, sollte den Schülern vermittelt werden, auf Präzision zu achten.

3 Operatoren

Operator	Definition
angeben, nennen	Ergebnisse numerisch oder verbal formulieren, ohne Darstellung des Lösungsweges und ohne Begründungen
begründen	eine Aussage, einen Sachverhalt durch Berechnung, nach gültigen Schlussregeln, durch Herleitung oder in inhaltlicher Argumentation verifizieren oder falsifizieren
berechnen, bestimmen	Ergebnisse von einem Ansatz oder einer Formel ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen
beschreiben	einen Sachverhalt oder ein Verfahren in vollständigen Sätzen unter Verwendung der Fachsprache mit eigenen Worten wiedergeben
beweisen, zeigen	Aussagen unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischen Schlüssen und Äquivalenzumformungen und unter Beachtung formaler Kriterien verifizieren
darstellen	mathematische Objekte in einer fachlich üblichen oder in einer vorgeschriebenen Form wiedergeben, graphisch darstellen: Anfertigen einer zeichengenauen, graphischen Darstellung auf der Basis der genauen Wiedergabe wesentlicher Punkte, bzw. maßgetreues oder maßstäbliches zeichnerisches Darstellen eines Objekts
deuten, interpretieren	Sachverhalte, Phänomene, Strukturen oder Ergebnisse in eine andere mathematische Sichtweise umdeuten oder rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem
entnehmen	aus vorgegebenen Darstellungen Daten zur Beantwortung von Fragen oder zur Weiterverarbeitung aufbereiten
erklären, erläutern	Sachverhalte auf der Grundlage von Vorkenntnissen so darlegen und veranschaulichen, dass sie verständlich werden
verwenden, nutzen, umgehen mit	Fachbegriffe, Regeln, mathematische Sätze, Zusammenhänge oder Verfahren auf einen anderen Sachverhalt beziehen
skizzieren	die wesentlichen Eigenschaften eines Objekts graphisch vereinfacht darstellen
überprüfen	durch Anwendung mathematischer Regeln oder Kenntnisse in einer ergebnisoffenen Situation einen vorgegebenen Sachverhalt verifizieren oder falsifizieren
untersuchen	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten, fachlich üblichen beziehungsweise sinnvollen Kriterien zielorientiert erkunden
vergleichen	Gemeinsamkeiten und Unterschiede herausarbeiten
zuordnen	einen begründeten Zusammenhang zwischen Objekten oder Darstellungen herstellen